

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар»		№ 35-11(ҚМ)-2025
Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		32 беттің 1 беті

ДӘРІС КЕШЕНІ

Пәннің атауы: Қолданбалы математика

Пән коды: KM 1201

ББ атауы және шифры: 6B07205- «Фармацевтика және медицинадағы цифрлық инжиниринг»

Оқу сағаты/ кредиттерінің көлемі: 150/5

Оқу курсы мен семестрі: 1,2

Дәріс көлемі: 10 (сағат)

Шымкент, 2025 жыл

Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар»

№ 35-11(ҚМ)-2025

Дәріс кешені «Қолданбалы математика»

32 беттің 2 беті

Дәріс кешені «Қолданбалы математика» пәнінің жұмыс оқу бағдарламасына (сиплабус) сәйкес әзірленген және кафедра мәжілісінде талқыланды.

Хаттама № 12 « 28 » 05 2025 ж.Кафедра меңгерушісі:  М.Б. Иванова

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»	№ 35-11(ҚМ)-2025 32 беттің 3 беті

№ 1 Дәріс

1. Тақырыбы: Екінші ретті анықтауыштар және олардың қасиеттері

2. Мақсаты: Студенттерге түсіндіру.

3. Дәріс тезистері:

Дәріс жоспары:

1. Анықтауыштар туралы кіріспе.
2. Анықтауыштардың қасиеттері.

Фармацевтикалық тәжірибеде кез келген формула арқылы бір-бірімен алдын - ала кейбір белгілі нақты байланыстармен берілген белгісіз шамалар жиі кездеседі.

Егер:

1. Формуладағы коэффициенттер тұрақты болуы
2. Формулаға енетін белгісіз шамалар тек бірінші дәрежеде болуы
3. Белгісіз шамалардың өз арасында көбейту болмауы деген шарттар орындалса, онда мұндай байланыстарды сызықты байланыс деп атайды.

Мысал. Лабораторияда жалпы салмағы 280 г. болатын 10 қорап дәрілік зат сараптамаға келген. Егер дәрілік зат салынған қораптың салмағы 15 г. болса, онда бір қораптағы дәрілік заттың орташа салмағын табу керек.

Ол үшін бір қораптағы дәрілік заттың орташа салмағын «х»- арқылы белгілеп, тендеу құру: $10x + 15 = 280$

Тендеудің шешуі: 26,5 г. бір қораптағы дәрілік заттың орташа салмағын көрсетеді.

Мысал. Лабораторияға жалпы салмағы 280 г. болатын 1-бөлімнен 10, ал 2-бөлімнен 10 қорап дәрілік зат сараптамаға келген.

Егер 1- бөлімнен келген 5, ал 2-бөлімнен келген 2 қораптың салмағы 128 г. болса, онда әрбір қораптағы дәрілік заттың орташа салмағын табу керек.

Ол үшін 1-бөлімнен келген дәрілік заттың орташа салмағын «х», ал 2-«у»- арқылы белгілеп, екі тендеу құру керек: $10x + 10y = 280$; $5x + 2y = 128$

Тендеулерді біріктіре отырып шешу арқылы екі бөлімнен келген әрбір қораптағы дәрілік заттың орташа салмағы анықталады: $x = 24$ г; $y = 4$ г.

Қарастырылған екі есептің шешуі де сызықты байланысты береді:

1-жағдайда сызықты тендеу алынды.

2-жағдайда сызықты тендеулер жүйесі алынды.

Коэффициенттерін сәйке әріптермен алмастыру арқылы сызықты тендеулер жүйесі

алынды:
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$
 мұндағы a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 , b_2 , - кейбір сандар, x, y - белгісіз шамалар.

Тендеулер жүйесінің коэффициенттерінен тік кесте құруға болады:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

1. Сандардан тұратын кез-келген тік бұрышты кестені матрица деп атайды.
2. Матрица құрылған a_{ij} элементерді берілген матрицаның элементтері деп атайды.
3. «D»санын сәйкес матрицаның екінші ретті анықтауышы немесе детерминанты деп атайды: $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Анықтауыш «D» әрпімен белгіленеді немесе Δ белгісімен жазылады:

$$D = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Мысал. Тендеулер жүйесі берілген:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3; \\ 8x - y = 6. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Жүйенің матрицасын құру және анықтауышты есептеу керек:

Жүйенің коэффициенттерінен матрица құру және оған сәйкес детерминант алу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

Оны есептеу: $\Delta = (-1) \times 2 - (4 \times 8) = -2 - 32 = -34.$

Анықтауыштағы жол (немесе баған) саны анықтауыштың реті деп аталады.

Анықтауыштардың қасиеттері:

1. Егер анықтауыштың жолдарын сәйкес бағандармен алмастырса, онда анықтауыштың мәні өзгермейді және керісінше.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

$$D^* = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Анықтауыштың жолдарын сәйкес бағандармен алмастыруды (немесе керісінше) транспонирлеу деп атайды.

2. Егер екі жолдың орындарын алмастырса, анықтауыш өз таңбасын өзгертеді.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

$$D = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - b_1 a_2).$$

Егер екі бағанның орындарын алмастырса, анықтауыш өз таңбасын өзгертеді.

$$D = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

3. Егер қандай да бір жолдың(бағанның) барлық элементтерін бірдей нөлден өзгеше “m” санына көбейтсе (бөлсе), онда анықтауыш осы санға көбейеді (бөлінеді):

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \therefore \dots \therefore D_1 = \begin{vmatrix} m a_1 & b_1 \\ m a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m a_1 & m b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = m D.$$

4. Егер қандай да бір жолдың (бағанның) элементтері:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & r a_1 \\ a_2 & r a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ r a_1 & r b_1 \end{vmatrix} = 0$$

5. Егер кез-келген жолдың (бағанның) әрбір элементін екі қосынды деп қарастырса, онда анықтауыш екі анықтауыштың қосындысына тең болады.

Анықтауыштың бірінші қосылғышы сәйкес жолдың (бағанның) элементтерінен тұратын бірінші, ал басқасы екінші қосылғыш болады:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_3 \\ b_1 + b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_1 b_3 - b_1 a_3) + (a_2 b_3 - b_2 a_3) = (a_1 + a_2) b_3 - (b_1 + b_2) a_3.$$

6. Егер кез келген бағанның (жолдың) элементтеріне сәйкес басқа бағанның (жолдың) алдын-

QYTYSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Qytystik Qazaqstan medicina akademiasy» AQ	 SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY AO «Yuzhno-Kazakhstanskaya meditsinskaya akademiya»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»	№ 35-11(ҚМ)-2025 32 беттің 5 беті

ала нөлден өзгеше санға көбейтілген элементтерін қосқанда анықтауыш өзгермейді:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 m & b_1 \\ a_2 + b_2 m & b_2 \end{vmatrix}.$$

4. Иллюстрациялық материал: Презентация, слайдтар.

5. Әдебиет: №1 қосымшаны қараңыз

6. Бақылау сұрақтары (кері байланысы):

1. Матрица деп қандай кестені айтады?
2. Анықтауыштың матрицадан айырмашылығы неде?

№ 2 Дәріс

1. Тақырыбы: Матрицалар. Матрицаларға қолданылатын амалдар

2. Мақсаты: Студенттерге түсіндіру.

3. Дәріс тезистері:

Дәріс жоспары:

1. Матрица және оның түрлері.
2. Матрицаның рангін анықтау.
3. Матрицаға қолданылатын амалдар.

«А» матрицасы деп a_{ij} матрицаның элементтері деп аталатын сандардан құрылған кез-келген тікбұрышты кестені айтады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij}).$$

Матрица – біркелкі элементтерден құрылған кез-келген тікбұрышты кесте:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрицаның түрлері:

1. Бір жолдан құрылған -**жолдық матрица**.

Бұл өлшемі «1 x n» болатын тікбұрышты матрица. $A = a_{11}a_{12}...a_{1n}$

2. Тек бір бағаннан тұратын- бағандық матрица. Бұл өлшемі «m x 1» болатын тікбұрышты

матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$

3. Бір элементтен тұратын – матрица: $A = (a_{11})1*1 = a_{11}, V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

5. Бас диагоналында орналасқан элементтері бірден, ал қалғандары нөлден тұратын – бірлік матрица. Ол «Е» - белгіленеді:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Элементтері «n» квадратты ретті нөлден тұратын және бас диагоналында орналасқан элементтері нөлге тең емес матрицаны -диагоналды матрица деп атайды:

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

7. Квадратты матрицаның маңызды сипаттамасына оның анықтаушы немесе детерминаты жатады.

Оның белгіленуі:

$$D_A = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

8. Егер $\det A \neq 0$ болса, онда «A» матрицасы ерекше емес деп аталады.

9. Егер $\det A = 0$ болса, онда «A» матрицасы ерекше деп аталады.

10. Егер «A» және «B» екі матрицаның өлшемдері, оларға сәйкес келетін элементтері бірдей болса, онда бұларды тең матрицалар деп атайды:

$$A = B \Leftrightarrow A = (a_{ij})_{m \times n}; B = (b_{ij})_{m \times n}, i, j: a_{ij} = b_{ij}.$$

Матрицаның рангін анықтау:

Тікбұрышты матрицаны қарастырайық. Егер бұл матрицадан «n» жолды және «m» бағанды бөліп алса, онда бөлінген жол және бағанның қиылысында тұрған элемент «k»-ретті квадратты матрица түзеді. Осы матрицаның анықтаушы «A» матрицасының «k»-ретті миноры деп аталады. «A» матрицасы «1» ден бастап «m» және «n» санының ең аз кез келген минорын қабылдай алады. «A» матрицасының нөлден өзгеше барлық минорларының ішінен ең болмағанда реті ең жоғары бір минор табылады..

Берілген матрицаның реті ең жоғары, нөлден өзгеше минорын матрицаның рангі деп атайды.

Кез келген тікбұрышты матрицаның рангі матрицаның ең кіші өлшемінен артық болмауы керек.

Егер матрица квадратты түрде болса, онда оның рангі матрицаның өлшемінен артық болмауы керек.

Егер «A» матрицасының барлық элементтері нөлге тең болса, онда оның рангі де нөлге тең болады: $r = RgA = 0$.

Матрицаның рангі туралы түсінік сызба тұрғызғанда, сызықты тендеулер жүйесінің шешуін табуда, бір базистен басқа базиске өткенде маңызды рөл атқарады. Сонымен қатар қолданбалы зерттеулерде әсіресе тәжірибенің нәтижесін өңдеуде, зерттелетін мәлімет мөлшерінің сапасын анықтауда кеңінен қолданады.

Өлшемі матрица рангісіне тең, нөлден өзгеше «A» матрицасының минорының кез-келген детерминанты базистік минор деп аталады. Яғни басқаша айтқанда «A» матрицасының рангі - бұл нөлден өзгеше ең жоғарғы минор.

$$\text{Мысал. Матрица рангін табу: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шешуі. Бұл матрицада тек бір жолда нөлден өзгеше элементтер болғандықтан, оның рангі: $RgA=1$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мысал. Матрица рангін табу:

Шешуі. Тексеру үшін берілген матрицаның детерминантын табамыз: $\det A = 7$. Ол нөлден өзгеше болғандықтан, матрицаның рангі 3 тең болады. Яғни матрицада пропорционалды жол немесе баған жоқ.

Матрицаға қолданылатын амалдар:

Өлшемдері бірдей $A = (a_{ij})$ және $B = (b_{ij})$ екі матрицаның қосындысы, үшінші $C = (C_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ немесе $C = A + B$ матрицасы деп аталады.

Мысал. « $A + B$ » матрицаларының қосындысын табу керек:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шешуі:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Салдарлар: $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2. $A = (a_{ij})$ матрицасының « k » санына көбейтіндісі $C = (c_{ij})$ матрицасы деп аталады. Мұндағы $c_{ij} = (ka_{ij})$.

Салдарлар: Матрицаны санға көбейткенде орындалатын қатынастар:

1. $kA = Ak$

2. $k(A+B) = Ak + Bk$

$$(k + \lambda)A = Ak + \lambda A$$

$$k(\lambda A) = \lambda kA = \lambda(kA)$$

3. « B » матрицасының барлық элементтері сәйкес « A » матрицасының элементтеріне абсолютті шама жағынан тең, ал таңбасы қарама-қарсы болса, онда « A » матрицасын « B » матрицасына қарсы матрица деп атайды: $B = (-1)(a_{ij})$.

Салдарлар: Кез-келген матрицаны нөлдік матрицаға көбейткенде нәтижесі нөлдік шаманы береді:

Егер « A » квадратты матрица болса, онда теңдік орын алады: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, мұндағы n - « A » матрицасының өлшемі.

$A = (a_{ij})_{m \times p}$ және $B = (b_{ij})_{p \times n}$ матрицаларының көбейтіндісі « C » матрицасы деп аталады. Оның әрбір элементінің формуласы: $C = AB = (a_{ij})_{m \times p} \cdot (b_{ij})_{p \times n} = (a_{s1}b_{1k} + a_{s2}b_{2k} + \dots + a_{sk}b_{sk})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n}$

Егер $AB = BA$ болса, онда « A » және « B » матрицалары алмастырмалы немесе коммутативті деп аталады.

Егер кейбір « A » матрицасының жолы мен бағанының орнын алмастырса, онда алынған матрица тасымалданған (транспонированной) деп аталады және « A^T » деп белгіленеді.

Егер $A = A^T$ теңдігі орындалса, онда матрица симметриялы деп аталады.

Егер $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ теңдігі орындалса, онда « A » матрицасына салыстырғанда алынған матрица кері матрица деп аталады.

4. Иллюстрациялық материал: Презентация, слайдтар.

5. Әдебиет: №1 қосымшаны қараңыз

6. Бақылау сұрақтары (кері байланысы):

1. Матрица деп нені айтады?

2. Матрицаның түрлерін атаңыздар?

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»	№ 35-11(ҚМ)-2025 32 беттің 8 беті

№ 3 Дәріс

1. Тақырыбы: Сызықтық алгебралық тендеулер жүйесі

2. Мақсаты: Студенттерге түсіндіру.

3. Дәріс тезистері:

1. Сызықтық алгебралық тендеулер жүйесінің негізгі анықтамасы.

2. Сызықтық тендеулер жүйелерінің шешуі.

3. Сызықтық тендеулер жүйелерінің түрлері.

«n» белгісіздерден тұратын «k» сызықтық тендеулерден құрылған сызықты жүйе:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned} \right\}$$

мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_n$ - белгісіздер; $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{kn}$ - белгісіздердің жанындағы коэффициенттер $b_1, b_2, \dots, b_k$ - бос мүшелер.

Мұндай тендеулер жүйесінің шешуі деп, жүйедегі $x_1, x_2, \dots, x_n$ белгісіздердің орнына қойғанда, жүйенің барлық тендеулері нақты теңдікке айланып «n» сандарының ($c_1, c_2, \dots, c_n$) жиынын айтады.

Ескерту:

Кейбір жүйенің шешуі болмауы да мүмкін. Сондықтан құрылған жүйені шешер алдында, оның шешуі барма соны анықтап алу керек.

2. Ең болмағанда бір шешуі болатын тендеулер жүйесін біріккен (совместной), ал шешуі болмайтын тендеулер жүйесін бірікпеген (несовместной) деп атайды.

3. Егер ең болмағанда $c_i^{(1)}$ санын біреуі $c_i^{(2)}$ санына сәйкес келмесе, онда тендеудің шешуі әртүрлі болады.

$$\left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_n^{(1)} \right) \text{ және } \left(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \dots, c_n^{(2)} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 6x_1 + 8x_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Мысал. Жүйе:

Жүйенің шешуі екі түрлі: $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = 0$ және $c_1^{(2)} = 4; c_2^{(2)} = -3$

Ең болмағанда әртүрлі 2 шешуі болатын жүйенің шексіз түрлі шешуі болуы мүмкін.

4. Егер біріккен жүйенің жалғыз шешуі болса, онда анықталған (определенной) деп аталады.

5. Егер біріккен жүйенің ең болмағанда екі шешуі болса, онда анықталмаған (неопределенной) деп аталады.

Сызықтық тендеулер жүйелерінің шешуі.

Құрылған жүйенің шешуі барма немесе жоқпа екендігін білу керек. Егер жүйенің шешуі бар болса, онда:

1. Егер жүйе матрицасының рангі кеңейтілген жүйе матрицасының рангіне тең болса, онда бұндай жүйе біріккен және ең болмағанда нөлге тең болмайтын бір шешуі болады.

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 12 \end{aligned} \right\}$$

Мысал. Жүйенің біріккендігін анықтау:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Шешуі. Жүйенің матрицасын құру

және оның рангін (яғни тәуелсіз жол және бағандар санын) анықтау:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = 1$$

Жүйенің кеңейтілген матрицасын құру $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 12 \end{pmatrix}$ және оның рангін (яғни тәуелсіз жол және бағандар санын) анықтау:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 12 \end{pmatrix} = 2$$

Кәдімгі матрицаның рангі кеңейтілген матрицаның рангіне тең емес, сондықтан жүйе бірікпеген, яғни бір де бір шешуі жоқ.

Сызықтық теңдеулер жүйелерінің түрлері:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Егер жүйе: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0$ біріккен болса, онда шешуі нөлге тең емес шексіз көп болады. Жүйе біртекті жүйе деп аталады. Біртекті жүйе әрқашан біріккен және әрқашан ең болмағанда бір нөлдік шешуі болады..

2. Егер жүйенің тек бір нөлдік шешуі болса, онда жүйе айқындалған (вырожденной) деп аталады.

3. Егер жүйдегі теңдеулер саны белгісіздер санынан кем болса, онда жүйе еш анықталмайтын (недоопределенной), ал жүйдегі теңдеулер саны белгісіздер санынан артық болса, онда жүйе артық анықталған (переопределенной) деп аталады.

4. **Иллюстрациялық материал:** Презентация, слайдтар.

5. **Әдебиет:** №1 қосымшаны қараңыз

6. **Бақылау сұрақтары (кері байланысы):**

1. Қандай теңдеулер сызықты деп аталады?
2. Қашан жүйенің ең болмағанда бір шешуі болады?

№ 4 Дәріс

1. **Тақырыбы:** Элементар және күрделі функцияның туындысы.

2. **Максаты:** Студенттерге түсіндіру.

3. **Дәріс тезистері:**

Дәріс жоспары:

1. Туынды ұғымына келтіретін есептер.
2. Туынды табудың жалпы ережелері.
3. Туындының анықтамасы.
4. Туынды табудың негізгі ережелері.
5. Қарапайым және күрделі функциялардың туындылары.
6. Берілген аралықта өсетін және кемитін функцияларды анықтау.
7. Берілген аралықта дифференциалданатын функциялардың өсуінің және кемуінің қажетті болуының шарты.
8. Берілген аралықта дифференциалданатын функциялардың өсуінің және кемуінің жеткілікті шарты.

Медицина мен фармация салаларында туынды ұғымы қандай мақсатта қолданылады? Адам ағзасында жүретін түрлі үдерістерді; дәрілік заттардың еру жылдамдығын; зат, энергия және жылу алмасу үдерістерін; химиялық реакциялардың жүру жылдамдықтарын және

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	 SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»	№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 10 беті

т.б. үдерістерді сипаттайтын шамаларды анықтау үшін туынды деген ұғым қолданылады. Туындының мағынасы неде?

Берілген $y=f(x)$ функциясының туындысын анықтау үшін:

1. Аргумент « x »-ке « Δx » өсімше беріледі.
2. $y=f(x)$ функциясы сәйкес « Δy » өсімше алады, яғни $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.
3. Функцияның өсімшесі $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ анықталады.
4. Функцияның өсімшесінің аргументтің өсімшесіне қатынасы алынады:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

5. Функцияның өсімшесінің аргументтің өсімшесіне қатынасының аргументтің өсімшесі нольге

ұмтылғандағы шегі анықталады: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Егер функцияның өсімшесінің аргументтің өсімшесіне қатынасының аргументтің өсімшесі нольге ұмтылғандағы шегі бар болса, онда сол шек “функцияның туындысы” деп аталады.

Туындыны анықтаудың негізгі ережелері:

1. Екі функцияның қосындысының не айырымының туындысы сол функциялардың туындыларының қосындысына не айырымына тең болады: $(u \pm v)'_x = u'_x \pm v'_x$.
2. Екі функцияның көбейтіндісінің туындысы бірінші функцияның туындысын екінші функцияға көбейтіп, ал екінші функцияның туындысын бірінші функцияға көбейтіп оларды қосқанға тең болады: $(uv)'_x = u'_x v + uv'_x$.
3. Екі функцияның бөліндісінің туындысы бірінші функцияның туындысын екінші функцияға көбейтіп, ал екінші функцияның туындысын бірінші функцияға көбейтіп олардың айырымын екінші функцияның квадратына бөлгенге тең болады: $\left(\frac{u}{v}\right)'_x = \frac{u'_x v - uv'_x}{v^2}$.

Қарапайым функциялар деп функция шамасы тек бір аргументке ғана тәуелді болатын функцияны айтады: $y=f(x)$.

Күрделі функциялар деп функция аргументі басқа шамаға тәуелді болатын функцияны айтады: $z=f(u)$, $u=\varphi(x)$ немесе $z=f(\varphi(x))$.

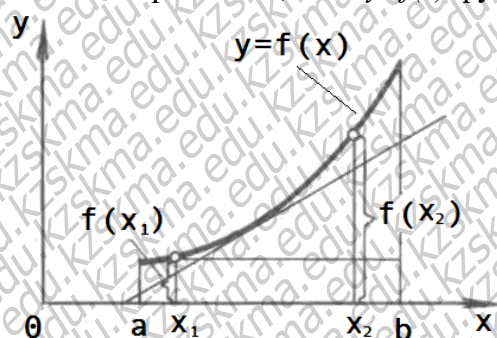
Функцияның туындысының негізгі формулаларының кестесі:

Қарапайым функциялар	Күрделі функциялар
$1. (C)'_x = 0;$ $2. (C(x))'_x = C'(x);$ $3. (x)'_x = 1;$	
$4. (x^n)'_x = nx^{n-1};$	$(u^n)'_x = nu^{n-1}u'_x$
$5. (a^x)'_x = a^x \ln a;$	$(a^u)'_x = a^u \ln a u'_x$
$6. (e^x)'_x = e^x;$	$(e^u)'_x = e^u u'_x$
$7. (\log_a x)'_x = \frac{1}{x \ln a};$	$(\log_a u)'_x = \frac{u'_x}{u \ln a}$
$8. (\lg x)'_x = \frac{1}{x} 0,4343;$	$(\lg u)'_x = \frac{u'_x}{u \ln 10} \approx \frac{u'_x}{u} 0,4343$

9. $(\ln x)_x = \frac{1}{x}$;	$(\ln u)_x = \frac{u_x}{u}$.
10. $(\sin x)_x = \cos x$;	$(\sin u)_x = \cos u \cdot u_x$.
11. $(\cos x)_x = -\sin x$;	$(\cos u)_x = -\sin u \cdot u_x$.
12. $(\operatorname{tg} x)_x = \frac{1}{\cos^2 x}$;	$(\operatorname{tg} u)_x = \frac{1}{\cos^2 u} u_x$.
13. $(\operatorname{ctg} x)_x = -\frac{1}{\sin^2 x}$;	$(\operatorname{ctg} u)_x = -\frac{1}{\sin^2 u} u_x$.
14. $(\arcsin x)_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arcsin u)_x = \frac{u_x}{\sqrt{1-u^2}}$.
15. $(\arccos x)_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arccos u)_x = -\frac{u_x}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $(\operatorname{arctg} x)_x = \frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arctg} u)_x = \frac{u_x}{1+u^2}$.
17. $(\operatorname{arccctg} x)_x = -\frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arccctg} u)_x = -\frac{u_x}{1+u^2}$.

Функцияны туынды арқылы зерттеу, оның өзгеру заңдылықтары мен туындысының қасиеттері арасындағы байланыстарға негізделген.

Егер кез келген « x_1 » және « x_2 » екі нүкте үшін осы аралықтағы $x_2 > x_1$ жағдайында $f(x_2) \geq f(x_1)$ теңсіздігі орындалса, онда $y=f(x)$ функциясы $]a, b[$ аралығында өсетін функция деп аталады.



Егер кез келген « x_1 » және « x_2 » екі нүкте үшін осы аралықтағы $x_2 > x_1$ жағдайында $f(x_2) \leq f(x_1)$ теңсіздігі орындалса, онда $y=f(x)$ функциясы $]a, b[$ аралығында кемитін функция деп аталады.

Егер $x_2 > x_1$ жағдайда $f(x_2) > f(x_1)$ теңсіздігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясы катал өсетін функция деп аталады.

Егер $x_2 > x_1$ жағдайда $f(x_2) < f(x_1)$, теңсіздігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясы катал кемитін функция деп аталады.

Катал өсетін және катал кемитін функцияларды ырғақты (монотонды) деп атайды.

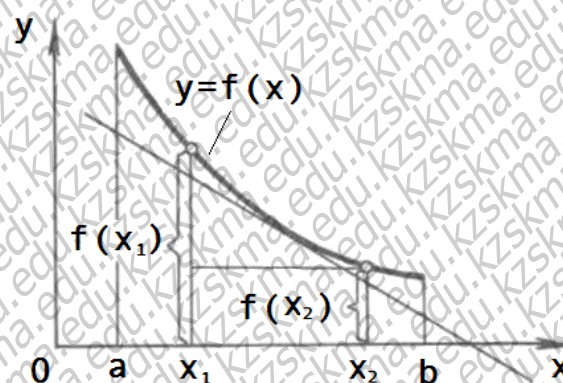
Қанның құрамындағы дәрілік заттың мөлшері ырғақты функцияға мысал болады.

Дәрілік затты бір рет енгізгенде, оның қандағы мөлшері уақыт өткен сайын кемитін функцияға жатады.

Дәрілік затты тамырға тұрақты жылдамдықпен үздіксіз енгізгенде, оның қандағы мөлшері уақыт өткен сайын өсетін функцияға жатады.

Ырғақсыз (немонотонные) функциялар да кездеседі. Мысалы, бір апта ішіндегі ауа температурасы ырғақсыз - функция.

Берілген аралықта дифференциалданатын функцияның өсуінің және кемуінің қажетті шарты:



QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 12 беті

- Егер дифференциалданатын функция $y = f(x)$ $[a, b]$ аралығында өссе, онда осы аралықтың кез келген « x » нүктесінде оның туындысы $f'(x) \geq 0$ болады.
 - Егер дифференциалданатын функция $y = f(x)$ $[a, b]$ аралығында кемісе, онда осы аралықтың кез келген « x » нүктесінде оның туындысы $f'(x) \leq 0$ болады.
 - Егер дифференциалданатын функция $y = f(x)$ $[a, b]$ аралығында өзгермесе («тұрақты болса»), онда оның туындысы $f'(x) = 0$ болады.
- Берілген аралықта дифференциалданатын функцияның өсуінің және кемуінің жеткілікті шарты:
- Егер $[a, b]$ аралығында $y = f(x)$ функциясының туындысы $f'(x)$ оң болса, онда $y = f(x)$ функциясы осы аралықта қатаң түрде өседі.
 - Егер $[a, b]$ аралығында $y = f(x)$ функциясының туындысы $f'(x)$ теріс болса, онда $y = f(x)$ функциясы осы аралықта қатаң түрде кемиді.
 - Егер $[a, b]$ аралығында $y = f(x)$ функциясының туындысы $f'(x)$ нөлге тең болса, онда $y = f(x)$ функциясы осы аралықта өзгермейді.
- 4. Иллюстрациялық материал:** Презентация, слайдтар.
- 5.Әдебиет:** №1 қосымшаны қараңыз
- 6. Бақылау сұрақтары (кері байланысы):**
1. Функция туындысының мағынасы неде?
 2. Күрделі функция туындысының қарапайым функция туындысынан айырмашылығы неде?
 3. Функция туындысы фармацияда қандай мақсатта қолданылады?
 4. Қандай жағдайда функция қатаң өседі?
 5. Қандай жағдайда функция қатаң кемиді?
 6. Функцияның өсуі және кемуінің қажетті шарттары.

№ 5 Дәріс

1. Тақырыбы: Функцияның дифференциалы

2. Мақсаты: Студенттерге түсіндіру.

3. Дәріс тезистері:

Дәріс жоспары:

1. Функция дифференциалының туындымен байланысы.
2. Дифференциалдың қасиеттері.
3. Функция дифференциалдарының кестесі.

Дифференциалдың функция туындысынан айырмашылығы неде?

Туындының анықтамасынан: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$

Егер туындының шегін өте аз « α » оң санмен алмастырса: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$ $\Delta y = y' \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$,

Екінші қосылғыш шама жағынан аз шамадан да дәреже шамасына аз болады, сондықтан аз шаманы аз шамаға көбейткенде, көбейтінді нөлге ұмтылады:

$$\alpha \cdot \Delta x \rightarrow 0$$

Бұл жағдайда жуықтап алғанда өсімше « Δ », « d » таңбасымен алмастырылады:

$$\Delta \approx d \quad dy = y' dx + 0$$

Функция өсімшесінің негізгі сызықты бөлігі функцияның дифференциалы деп аталады:

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 13 беті

$$dy = y' dx$$

Функцияның дифференциалы жуықтап есептеулерде қолданылады.

Функция дифференциалы қалай анықталады?

Функция дифференциалы анықтау үшін берілген функцияның бірінші ретті туындысын анықтап, оны тәуелсіз аргументтің дифференциалына көбейту керек.

Мысал. $y=2x^3-4x+5$ функциясы берілген.

Функцияның дифференциалын табу керек:

$$dy=(y)'dx=(2x^3-4x+5)'dx=(6x^2-4)dx.$$

Дифференциалдың қасиеттері:

1. Тұрақты шаманың дифференциалы нөлге тең:

$y = c$, мұндағы c - тұрақты шама, $y' = 0$, $dc = 0$.

2. Бірнеше функциялардың алгебралық қосындысы және айырымының дифференциалы, сол функциялардың дифференциалдарының алгебралық қосындысы және айырымына тең болады:

$$d(v + w - z) = dv + dw - dz$$

3. Тұрақты көбейткіш өзгеріссіз дифференциалдың сыртына шығарылады: $d(cu) = c du$

4. Екі көбейткіштің дифференциалы - бірінші көбейткішті екінші көбейткіштің дифференциалына, ал екінші көбейткішті бірінші көбейткіштің дифференциалына көбейтіп, бір-біріне қосқанға тең болады:

$$d(uv) = u dv + v du.$$

5. Бөлшектің дифференциалы- бөлгішті бөліндінің дифференциалына, ал бөліндіні бөлгіштің дифференциалына көбейтіп, оларды бір-бірінен шегеріп, бөлгіштің квадратына бөлгенге тең

$$\text{болады:} \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

6. Күрделі функцияның дифференциалы ($y=f(u)$, $u=g(x)$ – функциядан алынған функция) осы функцияның туындысына күрделі аргументтің дифференциалын көбейткенге тең болады:

$$df(u) = f'(u)du$$

Функций дифференциалдарының кестесі:

$$1. dx^n = nx^{n-1} dx.$$

$$7. d(\operatorname{ctgx}) = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

$$2. da^x = a^x \ln a dx.$$

$$8. d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$3. d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}.$$

$$9. d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}.$$

$$10. d(\operatorname{arctgx}) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$4. d(\sin x) = \cos x dx.$$

$$11. d(\operatorname{arccotgx}) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

$$5. d(\cos x) = -\sin x dx.$$

$$6. d(\operatorname{tgx}) = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$12. df(u) = f'(u)du$$

4. Иллюстрациялық материал: Презентация, слайдтар.

5.Әдебиет: №1 қосымшаны қараңыз

6. Бақылау сұрақтары (кері байланысы):

1. Дифференциалдың функция туындысынан айырмашылығы неде?

2. Функция дифференциалы қалай анықталады?

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 14 беті

№ 6 Дәріс

1. Тақырыбы: Туындыны қолдану арқылы функцияны зерттеу: берілген аралықта функцияның өсуі және кемуі. Функцияның сызбасын салу

2. Мақсаты: Студенттерге түсіндіру.

3. Дәріс тезистері:

Дәріс жоспары:

1. Функцияның сызбасын салудың алгоритмі.

2. Функцияның сызбасын мысал арқылы салу.

Функцияның сызбасын салудың алгоритмі:

1. Функцияның анықталу облысын табу.

2. Функцияның симметриялығын анықтау (функцияны тақ, жұп екенін зерттеу).

3. Функцияның үздіксіздігін, периодтылығын зерттеу.

4. Функцияны үзілу нүктесінің екі жағындағы өзгеруін қарастыру.

5. Функцияның шексіздікке өзгеруін анықтау.

6. Функция сызбасының координата өстерімен қиылысу нүктелерін табу.

7. Функцияның өсу, кему аралықтарын және экстремум нүктелерін табу.

8. Иілу нүктесін анықтау.

9. Ойыс және дөңес аралықтарын анықтау.

10. Барлық анықталған мәндерді бір кестеге келтіру және функцияның сызбасын салу.

Функцияның сызбасын мысал арқылы салу: $y = x^3 - 3x$

1. Функция барлық $x \in]-\infty, +\infty[$ анықталған.

2. Функцияның өсу және кему аралығын анықтау:

- Бірінші ретті туындыны анықтау: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

- Егер $f'(x) > 0$ болса, берілген аралықта функция өседі: $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$ ($x^2 > 1$, немесе $|x| > 1$).

Сондықтан $y = x^3 - 3x$ функциясы $]-\infty, -1[$ и $]1, +\infty[$ аралықта өседі.

- Егер $f'(x) < 0$ болса, берілген аралықта функция кемиді: $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$ ($x^2 < 1$, немесе $-1 < x < 1$).

Сондықтан $y = x^3 - 3x$ функциясы $]-1, 1[$ аралықта кемиді.

3. Критикалық нүктелерді анықтау және олардың сипатын зерттеу:

- Бірінші ретті туындыны ($f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$) нөлге теңей отырып, ($x_1 = -1$, $x_2 = 1$) критикалық нүктелерді анықтау.

- Бірінші ретті туындының $x_1 = -1$ және $x_2 = 1$ нүктелердің айналасындағы таңбасын анықтау.

- $x_1 = -1$ нүктесі үшін: $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. Сондықтан, $x_1 = -1$ - максимум нүктесі, ал функцияның максимумы: $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$.

- $x_2 = 1$ нүктесі үшін: $f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 < 0$.

Сондықтан, $x_2 = 1$ - минимум нүктесі, ал функцияның минимумы: $f(1) = (1)^3 - 3(1) = -2$

4. Үздіксіз қисықтың ойыс аймағынан дөңес аймағын бөлетін иілу нүктесі деп аталатын нүктені анықтау:

- $f''(x) = 6x = 0$ - екінші ретті туындыны.

- $x = 0 = 0$ - иілу нүктесінің абсциссасы.

- $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$ - иілу нүктесінің ординатасы.

- $O(0; 0)$ - иілу нүктесінің координаты.

5. Ойыс және дөңес аралықтарын анықтау:

- $f''(x) = 6x < 0$ шарты орындалса, қисық дөңес $x < 0$ болады.

Сондықтан $]-\infty, 0[$ аралығында қисық дөңес болады.

ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ	SKMA 1979	SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 15 беті

• $f''(x) = 6x > 0$ шарты орындалса, қисық ойыс $x > 0$ болады.
Сондықтан $]0, +\infty[$ аралығында қисық ойыс болады.

6. Қисықтың «Ох» өсімен қиылысу нүктесін анықтау. Ол үшін теңдеулер жүйесін құру және

$$\text{қисықтың «Ох» өсімен қиылысу нүктесін табу: } \begin{cases} y = x^3 - 3x \\ x = 0 \end{cases}$$

- Теңдеулер жүйесіндегі $x=0$ деп, $y=0$ анықтау.
- Қисықтың «Ох» өсімен қиылысу нүктесінің координатасы: $O(0; 0)$.

7. Қисықтың «Оу» өсімен қиылысу нүктесін анықтау. Ол үшін теңдеулер жүйесін құру және

$$\text{қисықтың «Оу» өсімен қиылысу нүктесін табу: } \begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = 0 \end{cases}$$

- Теңдеулер жүйесіндегі $y=0$ деп $x_1=0$; $x_2=\sqrt{3}$; $x_3=-\sqrt{3}$ мәндерін анықтау.
- Қисықтың «Оу» өсімен қиылысу нүктесінің координатасы: $M_1(-\sqrt{3}; 0)$; $M_2(\sqrt{3}; 0)$.

8. Зерттеу нәтижелерін кестеге енгізу:

x	-1	0	1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$f(x)$	2	0	-2	0	0
$f'(x)$	0	-3	0		
$f''(x)$	-6	0	+6		
Нүкте сипаты	ма x	иілу	min		

9. $y=x^3-3x$ функцияның сызбасын салу:

Барлық нүктелердің координаталары:

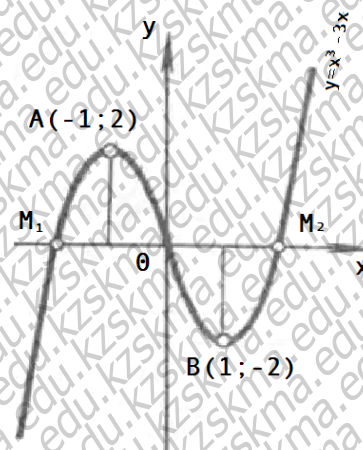
1. $O(0; 0)$ – иілу нүктесі.
2. $A(-1; 2)$ – мах нүктесі.
3. $B(1; -2)$ – min нүктесі.
4. $O(0; 0)$ - қисықтың «Ох» өсімен қиылысу нүктесі.
5. $M_1(-\sqrt{3}; 0)$; $M_2(\sqrt{3}; 0)$ – қисықтың «Оу» өсімен қиылысу нүктелері.

4. **Иллюстрациялық материал:** Презентация, слайдтар.

5. **Әдебиет:** №1 қосымшаны қараңыз

6. **Бақылау сұрақтары (кері байланысы):**

1. Функция сызбасын салу қандай тізбелерден тұрады?
2. Иілу нүктесі деп қандай нүктені айтады?



№ 7 Дәріс

1. **Тақырыбы:** Анықталмаған интеграл. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері.

Анықталмаған интегралды есептеу әдістері.

2. **Мақсаты:** Студенттерге түсіндіру.

3. **Дәріс тезистері:**

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 16 беті

Дәріс жоспары:

1. Анықталмаған интеграл.
2. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері.
3. Анықталмаған интегралдың негізгі формуллалары.
4. Анықталмаған интегралды есептеудің әдістері

Анықталмаған интегралдың функция дифференциалынан айырмашылығы неде?

Функция дифференциалы арқылы үдерістің өзгерісін анықтауға болады, ал функцияның өзгерген түрінен оның бастапқы түрін яғни алғашқы функциясын табу үшін анықталмаған интеграл деген ұғым қолданылады.

Егер берілген $F(x)$ функциясының туындысы $f(x)$, дифференциалы $f(x)dx$ болса, онда алғашқы функциялардың жиыны $F(x)+C$ $f(x)dx$ -тің анықталмаған интегралы деп аталынады.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Мұндағы: $\int$ - анықталмаған интегралдың белгісі, x – тәуелсіз аргумент, $f(x)$ – интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ – интеграл астындағы шама, $F(x)$ – алғашқы функция, C – тұрақты шама.

Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері:

1. Анықталмаған интегралдан алынған туынды интеграл астындағы функцияға тең болады:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

2. Анықталмаған интегралдың дифференциалы интеграл астындағы шамаға тең болады:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx$$

3. Алғашқы функцияның дифференциалынан алынған анықталмаған интеграл сол алғашқы функцияның өзіне және тұрақты шамаға тең болады: $\int dF(x) = F(x) + C$

4. «k» тұрақты шама интегралдың алдына өзгерісіз шығарылады: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

5. Бірнеше функциялар қосындысының не айырымының интегралы, сол функциялардың интегралдарының қосындысына не айырымына тең болады:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

Интегралдаудың негізгі формуллалары:

$$1. \int dx = x + C.$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; (n \neq -1).$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$$

$$12. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$13. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

Анықталмаған интегралды есептеудің әдістері:

1. Тікелей интегралдау әдісі:

Бұл әдіс интеграл астындағы функция тікелей кестелік формулаға сәйкес келгенде немесе интегралдың қасиеттерін пайдалана отырып кестелік формулаға келтірілгенде қолданылады.

$$1. \int (5x^2 + 2x - 3)dx = 5 \int x^2 dx + 2 \int x dx - 3 \int dx = 5 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} - 3x + C = \frac{5}{3} x^3 + x^2 - 3x + C$$

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 17 беті

$$2. \int (x^4 + 7^x) dx = \int x^4 dx + \int 7^x dx = \frac{x^5}{5} + \frac{7^x}{\ln 7} + C$$

2. Айнымалыны ауыстыру арқылы интегралдау әдісі:

Бұл әдіс $\int f(x) dx$ интегралындағы «х» аргументі күрделі ($x = \varphi(t)$), яғни $f(x)$ функциясының алғашқы функциясын бірден табуға мүмкіндік болмаған жағдайда $x = \varphi(t)$ алмастыруы арқылы берілген интегралды анықтау үшін қолданылады.

Жаңа функция мына түрде жазылады: $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

Бұл формула анықталмаған интегралдың айнымалыны ауыстыру әдісінің формуласы деп аталады.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}} = \left| \begin{array}{l} 2x+3=t \\ d(2x+3)=dt \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C$$

3. Бөлектен интегралдау әдісі:

Бұл әдіс интеграл астындағы функция әртүрлі екі $u=u(x)$ және $v=v(x)$ функцияларының көбейтіндісі түрінде берілгенде қолданылады.

Егер бұл функциялар дифференциалданса, онда $d(uv) = vdu + udv$ алынады, осыдан $udv = d(uv) - vdu$ анықталады.

Егер екі жағын интегралдыса, онда бөліктеп интегралдаудың формуласы алынады:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu \quad \int xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ d\varphi = \int \ell^x dx \\ \varphi = e^x + c; c = 0 \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

4. Иллюстрациялық материал: Презентация, слайдтар.

5.Әдебиет: №1 қосымшаны қараңыз

6. Бақылау сұрақтары (кері байланысы):

1. Анықталмаған интегралдың функция дифференциалынан айырмашылығы неде?
2. Анықталмаған интегралдың қандай қасиеттерін білесіздер?
3. Интегралдау әдістері.

№ 8 Дәріс

1. **Тақырыбы:** Анықталған интеграл. Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері және есептеу әдістері. Анықталған интегралдың қолданылуы

2. **Максаты:** Студенттерге түсіндіру.

3. **Дәріс тезистері:**

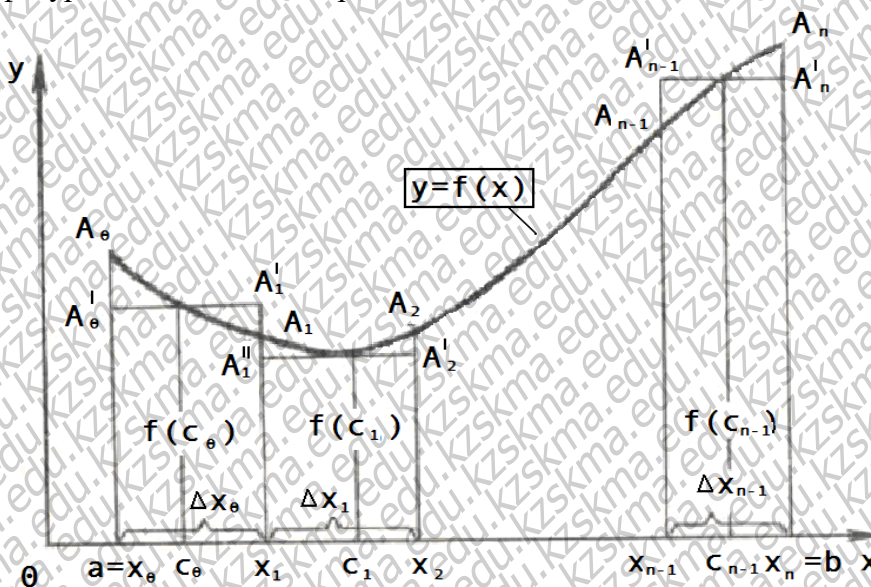
Дәріс жоспары:

1. Анықталған интеграл.
2. Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері.
3. Анықталмаған және анықталған интегралдың арасындағы байланыс.

4. Интегралдаудың әдістері.
5. Жазық фигуралардың ауданын есептеу.
6. Айнымалы күш жұмысы

Анықталған интеграл ұғымы математикада, фармацевтикада, инженерлік технологияда және қолданбалы ғылымдарда кең түрде қолданылады. Оның көмегімен қисық сызықпен шектелген аудандарды, доғаның ұзындығын, еркін денелердің көлемін, айнымалы күштің жұмысын, жылдамдықты, денелердің инерция моментін және т.с.с. есептейді.

Анықталған интеграл ұғымына келтіретін қисық сызықты трапецияның ауданын есептеуді қарастырайық. $y = f(x)$ қисығы, $[a, b]$ кесіндісі, «Ох» өсі, $x=a$ және $x=b$ түзулерімен шектелген фигура қисық сызықты трапеция деп аталады.



Егер $[a, b]$ кесіндісінде $f(x) > 0$ болса, онда қисық сызықты трапеция «Ох» өсінің үстінде орналасады.

Ауданы «S» қисық сызықты трапецияның «S» ауданын есептеу үшін $[a, b]$ кесіндісін еркін түрде «n» бөлікке бөлейік.

Бөлу нүктесі: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Бұл нүктелерден қисық сызықпен қиылысқанша перпендикуляр тұрғызайық. Осы нүктелердегі функцияның мәні: $y = f(x_0)$; $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$; ... ; $y_{n-1} = f(x_{n-1})$; $y_n = f(x_n)$.

Осының нәтижесінде қисық сызықты трапецияның ауданы «n» элементар қисық сызықты трапециялардың аудандарының қосындысына бөлінеді.

$\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$ аралықтарынан еркін түрде

$c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ нүктелерін алайық. Осы нүктелерден $y = f(x)$ қисығымен қиылысқанша перпендикуляр жүргізейік.

$f(c_0), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{n-1})$ - ординаталары алынады.

Нәтижесінде негізі $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$, ал биіктігі $f(c_0), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{n-1})$ ординаталары болатын сатылы тік бұрыштар аланады.

Бұл фигура - $A_0' A_1' A_1'' A_2' \dots A_n'$ сынық сызықтарымен шектелген.

Алынған сатылы фигураның «Sn» ауданы «n» санына және Δx_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) кесіндінің ұзындығына тәуелді болады..

«n» санын шексіз арттырғанда және « Δx_i » аралығын мүмкіндігінше азайтқанда, «Sn» сатылы фигураның ауданы «S» трапецияның ауданына жақындайды.

Сонымен қисық сызықты фигураның ауданын сатылы фигураның ауданы ұмтылатын шегі деп атауға болады.

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 19 беті

«Sn» ауданы берілген аралықтағы барлық тұрғызылған тік бұрыштардың аудандарының қосындысына тең болады:

$$S_n = f(c_0) \Delta x_0 + f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_{n-1}) \Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) (\Delta x_i).$$

Егер бөлегін «n» санын « Δx_i » аралықтың ең үлкен ұзындығы нөлге ұмтылатындай етіп шексіз ұлғайтқанда, қисық сызықты трапецияның ауданы әрбір қосындысы кесіндінің $f(c_i)$ нүктесіндегі функцияның мәні мен « Δx_i » аралық мәнінің көбейтіндісінен тұратын қосындының шегіне тең болады.

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) (\Delta x_i).$$

Бұл қосынды $[a, b]$ аралығындағы $y = f(x)$ функциясының интегралды қосындысы деп аталады. Егер интегралды қосындының соңғы шегі бар болса, онда бұл шекті $[a, b]$ аралығындағы $y = f(x)$ функциясының анықталған интегралы деп атайды:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) (\Delta x_i).$$

мұндағы, $f(x)$ – интеграл асты функция, «x» -интеграл айнымалысы, «a» саны- интегралды төменгі, «b» саны- жоғарғы шегі деп аталады.

Анықталған интеграл – шамасы $y = f(x)$ функцияның түріне, жоғарғы және төменгі шектерінің мәніне байланысты болатын тұрақты сан. Қисық сызықты трапецияның ауданы негізі $[a, b]$ аралығынан шектеулі трапециядан алынған функция интегралына сан жағынан тең болады:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері:

1. Анықталған интеграл интегралданатын айнымалылардың белгілеулеріне байланысты

болмайды:
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

2. Берілген $[a, b]$ аралығындағы $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функцияларының қосындысының анықталған интегралы, сол функциялардан алынған анықталған интегралдардың қосындысына

тең болады:
$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx$$

3. «k» тұрақты шама анықталған интегралдың алдына өзгеріссіз шығарылады:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

4. Егер жоғары және төменгі шектердің орнын ауыстырса, онда анықталған интеграл өз

таңбасын қарама-қарсы таңбаға өзгертеді:
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

5. Егер жоғары және төменгі шектер бір-біріне ($b=a$) тең болса, онда анықталған интеграл нөлге

тең болады:
$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \int_a^a dx = b - a$$

QNTYSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 20 беті

7. Егер төменгі интеграл бар болса, $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ онда осы интеграл $\int_a^b f(x)dx$ «а», «б», «с» нүктелерінің кез келген өз ара орналасуы үшін төменгі түрде орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

8. Егер $f(x) \geq 0$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Анықталған интеграл тұрақты санды, ал анықталмаған интеграл алғашқы функциялардың жиынын сипаттайды, бірақ анықталған және анықталмаған интегралдардың ұқсас жалпы белгіленуі, олардың арасында тығыз байланыстың бар екендігін көрсетеді.

Анықталған және анықталмаған интегралдардың арасындағы байланысты Ньютон – Лейбниц

формуласы орнатып берді: $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

Анықталған интегралдың шамасы интеграл асты функцияның жоғарғы және төменгі шегіндегі кез келген алғашқы функцияларының айрымына тең болады.

Анықталған интегралды есептеудің әдістері:

1. Тікелей интегралдау:

Бұл әдіс интеграл астындағы функция тікелей кестелік формулаға сәйкес келгенде немесе интегралдың қасиеттерін пайдалана отырып кестелік формулаға келтірілгенде қолданылады.

$$\int_1^2 (2x+3)dx = \int_1^2 2xdx + \int_1^2 3dx = 2 \int_1^2 xdx + 3 \int_1^2 dx = 2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^2 + 3x \Big|_1^2 = (2^2 - 1^2) + 3(2 - 1) = 6$$

2. Айнымалыны ауыстыру арқылы интегралдау:

Бұл әдіс $\int f(x)dx$ интегралындағы «х» аргументі күрделі ($x = \varphi(t)$), яғни $f(x)$ функциясының алғашқы функциясын бірден табуға мүмкіндік болмаған жағдайда $x = \varphi(t)$ алмастыруы арқылы берілген интегралды анықтау үшін қолданылады.

Жаңа функция мына түрде жазылады: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Бұл формула анықталмаған интегралдың айнымалыны ауыстыру әдісінің формуласы деп аталады.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \left| \begin{array}{l} 4-x=t \\ d(4-x)=dt \\ dx=-dt \\ t_1=4 \\ t_2=2 \end{array} \right| = -\int_4^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\int_4^2 t^{-\frac{1}{2}} dt = -2\sqrt{t} \Big|_4^2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{4} = -2\sqrt{2} + 4 = 1,18$$

3. Бөлектеп интегралдау:

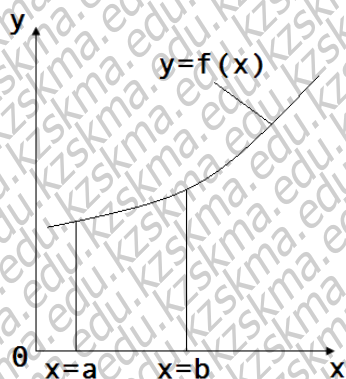
Бұл әдіс интеграл астындағы функция әртүрлі екі $u=u(x)$ және $v=v(x)$ функцияларының көбейтіндісі түрінде берілгенде қолданылады.

Егер бұл функциялар дифференциалданса, онда $d(uv) = vdu + udv$ алынады, осыдан $udv = d(uv) - vdu$ анықталады.

Егер екі жағын интегралдыса, онда бөліктеп интегралдаудың формуласы алынады:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_1^2 \ln x dx = \left. \begin{array}{l} \ln x = u \\ d \ln x = du \\ \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv \\ x = v \end{array} \right\} = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - \ln 1 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - 1$$

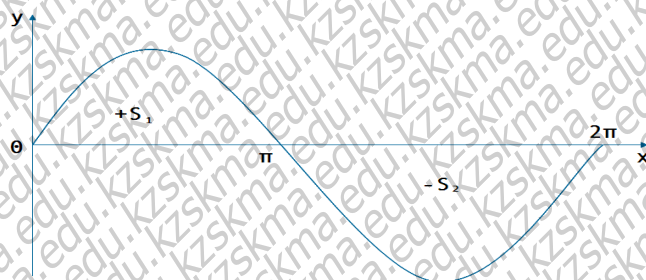


Жазық фигуралардың ауданын есептеу: $[a, b]$ аралығында $y = f(x)$ функциясы үздіксіз.

Егер $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ сызықтарымен шектелген қисық сызықты трапецияның ауданы $f(x) > 0$ болса, онда осы аудан анықталған интегралға тең болады:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Мысал. $y = \sin x$ синусойдасы және $0 \leq x \leq 2\pi$ аралығындағы Ox өсімен шектелген фигураның ауданын анықтау керек.



Шешуі: $[0, 2\pi]$ аралығын екі $[0, \pi]$ және $[\pi, 2\pi]$ бөлікке бөлеміз.

$[0, \pi]$ аралығында $\sin x \geq 0$ болады, сондықтан:

$$S_1 = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2 \text{ кв. өлшем.}$$

$[\pi, 2\pi]$ аралығында $\sin x \leq 0$ болады, сондықтан:

$$S_2 = \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = |-(\cos 2\pi - \cos \pi)| = 2 \text{ кв. өлшем.}$$

Фигураның ауданы: $S = S_1 + S_2 = 2 + 2 = 4$ кв. өлшем.

Айнымалы күш жұмысы:

Дене «MN» түзуі бойымен шамасы $F=f(s)$ болатын айнымалы күш әсерінен қозғалады. Күштің

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 22 беті

бағыты қозғалыстың бағытымен бағыттас.

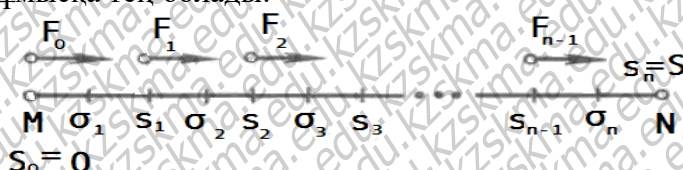
Денені «М» жағдайынан «N» жағдайына ауыстыратын күштің атқаратын жұмысын анықтау керек.

Дененің «MN» жүріп өткен жолын $s_0=0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n = S$ нүктелері арқылы «n» элементар бөліктерге бөлеміз.

Әрбір элементар бөліктерден σ_i ($i=0,1,2,\dots,n$) нүктені таңдап аламыз.

Бұл кезде әрбір элементар бөліктегі $f(\sigma_i)$ күші тұрақты болады.

$f(\sigma_i) \Delta s_i$ көбейтіндісі жуықтап алғанда Δs_i жүрілген жолдағы күш әсерінен атқарылатын жұмысқа тең болады:



Элементар аралықтардағы жұмыстың қосындысы:

$$A = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i) \Delta s_i = \int_0^S f(s) ds \text{ немесе } A = \int_0^S f(s) ds$$

$F=f(s)$ айнымалы күштің жұмысы сан жағынан «S» жүрілген жолдан алынған интегралға тең болады.

Мысал:

$t = 0^\circ\text{C}$ температурадағы, бір моль идеал газдың кері изотермиялық үдеріс кезінде $2,24 \cdot 10^{-3}$ - нен $22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ -қа ұлғайғанда атқаратын жұмысын есептеу керек.

Шешуі: Бір моль идеал газдың кері изотермиялық үдеріс кезінде қысымы $p = RT/V$ болады.

Газдың көлемі «dV» шамасына өзгергенде, атқарылатын элементар жұмыс $dA = pdV$ болды.

Газдың көлемі V_1 -ден V_2 -ге ұлғайғанда атқарылатын толық жұмыс:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = 8,32 \cdot 273 \ln \frac{22,4 \cdot 10^{-3}}{2,24 \cdot 10^{-3}} = 5,23 \text{ кДж.}$$

4. Иллюстрациялық материал: Презентация, слайдтар.

5. Әдебиет: №1 қосымшаны қараңыз

6. Бақылау сұрақтары (кері байланысы):

1. Сатылы фигураның ауданы неге тәуелді болады?
2. Қандай қосынды интегралдық қосынды деп аталады?
3. Анықталған интеграл деп нені айтады?
4. Анықталған интегралдың қандай негізгі қасиеттерін білесіздер?
5. Анықталған интегралдың міні қалай анықталады?
6. Жазық фигуралардың ауданы қалай анықталады?
7. Айнымалы күштің атқаратын жұмысы қалай анықталады?

№ 9 Дәріс

1. Тақырыбы: Бірінші және екінші ретті дифференциалдық тендеулер және олардың түрлері

2. Мақсаты: Студенттерге бірінші ретті дифференциалдық тендеулер және олардың түрлерін түсіндіру.

3. Дәріс тезистері:

Дәріс жоспары:

1. Дифференциалдық тендеулер туралы ұғым.

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 23 беті

2. Дифференциалдық тендеудің жалпы және дербес шешуі.
 3. Бірінші ретті дифференциалдық тендеулердің түрлері.
 4. Реті төмендітілетін екінші ретті дифференциалдық тендеулер.
 5. Құрамында ізделініп отырған функцияның өзі және оның туындысы болмайтын екінші ретті дифференциалдық тендеу.
 6. Құрамында ізделініп отырған функцияның өзі болмайтын екінші ретті дифференциалдық тендеу.
 7. Екінші ретті, коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалдық тендеу.
- Қарапайым тендеулерден дифференциалдық тендеудің негізгі айырмашылығы неде?

Дифференциалдық тендеу деп «х» тәуелсіз айнымалы, ізделініп отырған $y=f(x)$ функция және $y', y'', \dots, y^{(n)}$ оның туындысы немесе $dy, d^2y, \dots, d^{(n)}y$ дифференциалының арасындағы байланысты сипаттайтын тендеуді айтады.

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Дифференциалдық тендеудің жалпы түрде жазылуы:

$$F(x, dy, d^2y, d^3y, \dots, d^{(n)}y) = 0$$

Егер ізделініп отырған $y=f(x)$ функциясы тек бір айнымалыға тәуелді болса, онда

дифференциалдық тендеу қарапайым деп аталады: $y' = 4x^3$

Дифференциалдық тендеудің реті неге байланысты болады?

Дифференциалдық тендеудің құрамындағы туындының немесе дифференциалдың ең жоғарғы

$$y' = 4x^3 + 3 - 1 \text{ ретті}$$

реті дифференциалдық тендеудің ретін көрсетеді. $y'' + 4y' - y = 0 - 2 \text{ ретті}$

$$y''' = \sin(x) - 3 \text{ ретті}$$

Егер дифференциалдық тендеудің оң жақ бөлігі нөлге тең болса, онда бір текті, ал нөлге тең болмаса, онда бір текті емес тендеу деп аталады.

Дифференциалдық тендеудің шешулерінің қарапайым тендеудің шешулерінен айырмашылығы неде?

Дифференциалдық тендеудің жалпы шешуі

деп сол тендеуді қанағаттандыратын, құрамында тәуелсіз айнымалы «х» және тұрақты шама «С» болатын

$y=f(x, C)$ - функциясын айтады.

$F(x, y, C)=0$ түрінде жазылған дифференциалдық тендеудің шешімін жалпы интеграл деп айтады.

Анықталған «С»-нің мәнін жалпы шешімге қойғанда алынған функцияны дербес шешуі деп атайды.

Дифференциалдық тендеудің түрлері:

1. $f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$ түрдегі дифференциалдық тендеуді айнымалылары дараланатын бірінші ретті дифференциалдық тендеу деп айтады.

Бұл тендеуді шешу үшін:

1) Тендеудегі айнымалыларды даралау керек: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0$

Бұл айнымалылары дараланған бірінші ретті тендеу.

2) Айнымалылары дараланған бірінші ретті тендеудің екі жағын интегралдау керек:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = C$$

3) Интегралдау арқылы алынған функция сол дифференциалдық тендеудің жалпы шешуі деп аталады.

$$y' = y^2 \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$$

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x dx$$

Мысал:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx \Rightarrow \int y^{-2} dy = \int \cos x dx$$

$$-y^{-1} = \sin x + C$$

$$\frac{1}{y} = -\sin x + C \quad \text{— жалпы шешімін}$$

2. $y' + p(x)y = f(x)$ түрдегі дифференциалдық тендеуді бірінші ретті сызықты дифференциалдық тендеу деп айтады.

Бұл тендеудің шешуі бір-біріне тәуелсіз екі функцияның көбейтіндісі

$y = uv$, мұндағы $u = u(x)$, $v = v(x)$ түрінде анықталады.

Тендеуді шешу үшін:

1) $y = uv$ функциясынан бірінші ретті туынды алу керек. $y' = u'v + uv'$

2) Туындының және функцияның мәнін берілген негізгі тендеуге қою керек.

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$$

3) Екінші және үшінші қосылғыштарды топтап «u»-ды жақшаның сыртына шығару керек.

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)$$

4) Екінші қосылғышты нөлге теңестіріп, жүйеден «v» функциясын анықтау керек $\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = f(x) \end{cases}$

$$v' = -p(x)v$$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$$

$$\ln v = -\int p(x)dx$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

5) Анықталған «v» функциясын жүйедегі тендеуге қойып, «u» функциясын анықтау керек.

$$u'v = f(x)$$

$$u' = \frac{f(x)}{e^{-\int p(x)dx}}$$

$$u' = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$u = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx$$

6) Тендеудің шешуі: $y = uv = e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx$

Екінші ретті дифференциалдық тендеулер:

$F(x, y, y', y'') = 0$ –тендеуді екінші ретті дифференциалдық тендеу деп атайды.

$y'' = f(x, y, y')$ –тендеуінің жалпы шешуі құрамында екі тұрақты шама болатын функция болады:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Реті төмендетілетін екінші ретті дифференциалдық тендеулердің түрлері:

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 25 беті

1.1. Құрамында ізделініп отырған функцияның өзі және оның туындысы болмайтын екінші ретті тендеу:

$y'' = f(x)$ – түрдегі құрамында ізделініп отырған функцияның өзі және оның туындысы болмайтын екінші ретті дифференциалдық тендеу деп атайды. Бұндай тендеулер олардың ретін төмендете алатын жаңа функция енгізу арқылы екі рет интегралдағанда шешіледі.

$u(x)$ функциясын енгізейік:

Егер бірінші ретті туындыны $y' = u(x)$ деп алмастырсақ, онда екінші ретті туынды:

$y'' = (y')' = u'(x)$ және $u'(x) = f(x)$ немесе $du/dx = f(x)$ болады.

Айнымалыларды бөліп, интегралдау арқылы бірінші ретті туындыны анықтаймыз:

$$du = f(x)dx, \int du = \int f(x)dx, u(x) = \int f(x)dx + C_1$$

немесе

$$y' = \int f(x)dx + C_1, \frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1$$

Айнымалыларды бөліп, интегралдау арқылы функцияны анықтаймыз:

$$dy = (\int f(x)dx + C_1)dx,$$

$$\int dy = \int (\int f(x)dx + C_1)dx,$$

$$y = \int (\int f(x)dx) + C_1 x + C_2 - \text{ берілген тендеудің жалпы шешуі}$$

Мысал. $y'' = x$ - тендеуінің жалпы шешуі керек.

Шешуі. $y' = u(x)$ деп белгілесек, онда

$y'' = u'(x)$ және $u'(x) = x$ немесе $du/dx = x$. Айнымалыларды бөліп, интегралдау арқылы

$$du = xdx, \int du = \int xdx, u = \frac{x^2}{2} + C_1$$

бірінші ретті туындыны анықтаймыз: немесе

$$y' = \frac{du}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

1.2 1.2. Құрамында ізделініп отырған функцияның өзі болмайтын екінші ретті дифференциалдық тендеу:

$y'' = f(x, y')$ түрдегі құрамында ізделініп отырған функцияның өзі болмайтын екінші ретті дифференциалдық тендеу деп атайды. $y' = z(x)$ жаңа функциясын енгізе отырып «z»

салыстырғанда бірінші ретті тендеу аламыз: $z' = f(x, z)$.

Мысал. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$ - тендеуінің жалпы шешуін табу керек.

Шешуі.

$$(1 + x^2)z' - 2xz = 0,$$

Егер $y' = z$, $y'' = z'$ алмастырса, онда:

$$(1 + x^2) \frac{dz}{dx} - 2xz = 0$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{2x}{1 + x^2} dx;$$

Айнымалыларын бөліп, интегралдаймыз: $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2x}{1 + x^2} dx:$

$$\ln(z) = \ln(1 + x^2) + \ln(C_1)$$

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 26 беті

Потенцирлегенде: $z=C1(1+x^2)$ өрнегі алыныды.

Бұдан $z = y$ болғанда, $y'=C1(1+x^2)$ немесе $dy/dx=C1(1+x^2)$ немесе $dy=C1(1+x^2)dx$ болады.

Айнымалыларды бөліп, интегралдау арқылы функцияны анықтаймыз:

$$\int dy = \int C_1(1+x^2)dx$$

$y = C1 x^3/3 + C1x + C2$ – жалпы шешуі.

$$2. \quad y'' + py' + qy = 0$$

- түрдегі дифференциалдық тендеуді бір текті, екінші ретті, коэффициенттері тұрақты ($p, q = \text{const}$) сызықты дифференциалдық тендеу деп айтады.

Бұл тендеудің жалпы шешімі $y=e^{kx}$ – Эйлердің функциясы арқылы анықталады.

Тендеуді шешу үшін:

1) $y=e^{kx}$ – Эйлердің функциясынан бірінші және екінші ретті туынды табу керек.

$$y' = k e^{kx} \quad y'' = k^2 e^{kx}$$

2) Берілген тендеудегі функцияның, бірінші және екінші ретті туындыларының орнына табылған мәндерді қою керек.

$$k^2 e^{kx} + p k e^{kx} + q e^{kx} = 0$$

3) Эйлердің функциясын жақшаның сыртына шығарғанда, оның нөлге тең болмайтындығын ескеріп, екінші көбейткішті нөлге теңеп жазу керек.

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

$$e^{kx} \neq 0, k^2 + pk + q = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0$$

Бұл тендеу екінші ретті, коэффициенттері тұрақты сызықты дифференциалдық тендеудің сипаттаушы тендеуі деп аталады.

$$k^2 + pk + q = 0,$$

4) Сипаттаушы тендеудің түбірлерін табу керек.

$$k_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

5) Екінші ретті, коэффициент-тері тұрақты сызықты дифференциалдық тендеудің жалпы шешуі сипаттаушы тендеудің түбірлеріне байланысты болады:

5.1 Егер сипаттаушы тендеудің k_1 және k_2 түбірлері нақты, әр-түрлі сан болса, онда тендеудің

$$D > 0, k_1 \neq k_2$$

жалпы шешуі:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

5.2 Егер сипаттаушы тендеудің k_1 және k_2 түбірлері нақты, бір-біріне тең сан болса, онда

$$D = 0, k_1 = k_2 = k$$

тендеудің жалпы шешуі:

$$y = e^{kx}(C_1 x + C_2)$$

5.3 Егер сипаттаушы тендеудің k_1 және k_2 түбірлері жорымал яғни жалған сан болса, онда

$$D < 0, k_1 \neq k_2, k_{1/2} = \alpha + \beta i$$

тендеудің жалпы шешімі:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және аппараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 27 беті

мұндағы: $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{D}, i = \sqrt{-1}$.

4. Иллюстрациялық материал: Презентация, слайдтар.

5. Әдебиет: №1 қосымшаны қараңыз

6. Бақылау сұрақтары:

1. Дифференциалдық тендеудің жалпы шешуінен дербес шешуінің айырмашылығы неде?
2. Дифференциалдық тендеулер фармацияда қандай мақсатта қолданылады?
4. Екінші ретті дифференциалдық тендеулер фармацияда қандай мақсатта қолданылады?

№ 10 Дәріс

1. Тақырыбы: Физика-химиялық және фармацевтикалық мазмұндағы есептерге дифференциалдық тендеу құру және шешу

2. Мақсаты: Студенттерге физика-химиялық және фармацевтикалық мазмұндағы есептерге дифференциалдық тендеу құруды және шешуді үйрету.

3. Дәріс тезистері:

Дәріс жоспары:

Фармация, биология және медицинадағы қолданбалы есептер:

1. Дәрілік заттың еру заңы.
2. Уақыт ішінде бактерияның өсу заңы.
3. Уақыт ішінде таяқша тәрізді жасушаның өсу заңы.
4. Дыбыс өрісінде жасушаның бұзылу заңы.
5. Эпидемия теориясына дифференциалдық тендеу құру және шешу.

Дифференциалдық тендеулер физика-химиялық, фармацевтикалық және медицина – биологиялық мазмұнды есептерді шешуде маңызды орын алады. Бұл тендеулерді қолдана отырып, берілген үдерісті немесе құбылысты сипаттайтын айнымалы шамалардың арасындағы байланысты анықтау мүмкіндігіне қол жеткізуге болады. Кез келген есепті математикалық талдау арқылы шешу үш этаптан тұрады:

1. есептің шартын математикалық тілге аудару;
2. есепті шешу;
3. алынған нәтижені бағалау.

Жұмыстың бірінші бөлігі кәдімгі дифференциалдық тендеу құру болып табылады. Бұл бөлігі өте қиын соғады, себебі дифференциалдық тендеу құрудың жалпы әдістері жоқ және бұл облысты зертеу дағдылары нақты мысалды жанжақты оқып, үйрену барысында ғана жинақталады:

Фармация, биология және медицинадағы қолданбалы есептер:

1. Дәрілік заттың еру заңы:

Таблеткадағы дәрілік заттың еру жылдамдығы таблеткадағы дәрілік заттың мөлшеріне байланысты (пропорционал) болады. Уақыт ішінде дәрілік зат мөлшерінің өзгеру тәуелділігін анықтау керек.

«t» уақытында таблеткадағы ерімей қалған зат мөлшерін «m» деп белгілейік.

Сонда дәрілік заттың еру жылдамдығы: $dm/dt = - km$, мұндағы k – еру жылдамдығының тұрақтысы.

Минус таңбасы дәрілік зат мөлшерінің уақыт ішінде кемитіндігін көрсетеді.

Айнымалыларды бөліп, интегралдау керек:

$$\frac{dm}{dt} = -kdt,$$

$$\int \frac{dm}{dt} = -\int kdt, \ln(m) = -kt + \ln(C), t = 0 \text{ болғанда } m=m_0 \text{ деп алып, } C=m_0 \text{ тұрақтының мәні}$$

$$\ln(m) = \ln e^{-kt} + \ln(C),$$

$$m = Ce^{-kt}.$$

анықталады. $m = m_0 e^{-kt}$ – дәрілік заттың еру заңы.

2. Уақыт ішінде бактерияның өсу заңы.

Ультрадыбыстық толқынның әерінен суспензиялық орталардың тұтастығы бұзылуын және кішкентай көпіршіктер мен бос кеңістіктер пайда болуын кавитация деп атайды.

Олардың тығыздығы судың тығыздығымен салыстырғанда өте аз болады.

Қарапайым бактериялар, балдырлар, ашытқы, лейкоциттер, эритроциттер әсері жоғары дыбыс өрісінде пайда болатын кавитация кезінде бұзылады.

Әртүрлі биологиялық жасушаның бұзылуының салыстырмалы жылдамдығы кең диапазондық жиілікте тұрақты болып қалады.

Бұл жылдамдықтар әртүрлі жасушалардың салыстырмалы бұзылғыштығын сипаттайды.. Бұнын сандық сипатын анықтау үшін дыбыс өрісінде жасушаның бұзылу жылдамдығын анықтау керек.

Бұл сұрақты зерттей келе ең болмағанда 1 % жасуша бұзылмай қалатындығын мына түрде жазуға болады: $dN/dt = -RN$, мұндағы «N» - жасуша концентрациясы; «t» - уақыт; «R» - тұрақты шама.

$$\frac{dN}{N} = -Rdt,$$

$$\int \frac{dN}{N} = -\int Rdt,$$

Айнымалыларды бөліп, интегралдау керек: $\ln(N) = -Rt + \ln(C),$

$$\ln(N) - \ln(C) = -Rt$$

$$\ln\left(\frac{N}{C}\right) = -Rt, \frac{N}{C} = e^{-Rt}, N = Ce^{-Rt}.$$

$t = 0$ болғанда $N = N_0$ деп алып, $C = N_0$ тұрақтының мәні анықталады.

$N = N_0 e^{-Rt}$ - дыбыс өрісінде жасушаның бұзылу заңы.

5. Эпидемия теориясына дифференциалдық теңдеу құру және шешу:

Зерттелетін ауру созылмалы болған жағдайда эпидемия теориясына дифференциалдық теңдеу қалай құрылып, қалай шешілетінін қарастырайық. Бұл кезде инфекцияның берілуі үдерісі аурудың өтуінен де тез жүреді және зақымдалған түр алынып тасталмайды. Ол зақымдалмаған түрмен кездескенде оған тағы да инфекция береді. Бастапқы уақыт $t = 0$ кезде: «a» - зақымдалған түрдің саны, «b» - зақымдалмаған түрдің саны. Уақыт «t» кезде: $x(t)$ - зақымдалған түрдің саны, $y(t)$ - зақымдалмаған түрдің саны. Бір ұрпақтың өмір сүру мерзімінен кіші кез келген «t» уақыт аралығында мынандай теңдік орын алады: $x + y = a + b$. Осы жағдайда $y = f(t)$ уақыт ішінде зақымдалмаған түрдің өзгеру заңын анықтау керек. Инфекция залалданған түрмен залалданбаған түр кездескенде беріледі. Сондықтан залалданбаған түрдің саны, залалданған түрмен залалданбаған түрдің кездесу санын пропорционал түрде уақыт ішінде кемиді. «dt» уақыт аралығы үшін: $dy = -\beta xydt$ болады. Бұдан $dy/dt = -\beta xy$, мұндағы β - пропорционалдық коэффициент. Теңдеуге $x=a+b-y$ мәнін қою арқылы айнымалылары дараланатын дифференциалдық теңдеу алынды: $dy/dt = -\beta y(a + b - y)$. Дифференциалдар және

ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН MEDISINA АКАДЕМИЯСЫ «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 29 беті

айнымалыларды даралағаннан кейін тендеу алынды: $\frac{dy}{y(a+b-y)} = -\beta dt$. Бұл тендеудің сол жағын түрлендірейік:

$$\frac{1}{a+b} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a+b-y} \right) dy = -\beta dt,$$

$$\int \frac{1}{a+b} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a+b-y} \right) dy = -\int \beta dt,$$

Интегралдаймыз: $\frac{1}{a+b} \int \frac{dy}{y} + \frac{1}{a+b} \int \frac{dy}{a+b-y} = -\beta t + C,$

$$\ln(y) - \ln(a+b-y) = -(a+b)\beta t + \ln(C),$$

$$\ln\left(\frac{y}{a+b-y}\right) = \ln(e^{-\beta(a+b)t}) + \ln(C),$$

$$\frac{y}{a+b-y} = Ce^{-\beta(a+b)t}.$$

$$C = \frac{b}{a},$$

$t = 0$ болғанда, $y = b$ деп, C - анықтаймыз:

$$\frac{y}{a+b-y} = \frac{b}{a} e^{-\beta(a+b)t}.$$

Тендеуді «у» арқылы шешеміз: $y(t) = \frac{b(a+b)}{b+ae^{\beta(a+b)t}}$ - уақыт ішінде зақымдалмаған түр санының кему заңы.

4. Иллюстрациялық материал: Презентация, слайдтар.

5. Әдебиет: №1 қосымшаны қараңыз

6. Бақылау сұрақтары:

1. Дәрілік заттың еру жылдамдығын қалай анықтайды?
2. Дифференциалдық тендеулерді құру қандай этаптардан тұрады?

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 30 беті

№1 қосымша

Әдебиет:

Негізгі:

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013-320 с.
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014. - 144 бет.
6. Математика. II-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
7. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
8. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
9. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

Қосымша:

1. Иванова М.Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Исакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Исакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

Электронды басылымдар:

1. Иванова М.Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ). - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020.
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподавания математики, оқу құралы. - Қарағанды 2017 <https://aknurpress.kz/reader/web/1884>
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 <https://aknurpress.kz/reader/web/1691>
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Қарағанда: Издательство «АҚНҰР». – 2016. <https://aknurpress.kz/reader/web/1109>
5. Кошанова Г.Р. Математика 1: оқу құралы, -Алматы 2019. <https://aknurpress.kz/reader/web/2080>
6. Кошанова Г.Р. Математика 2: оқу құралы: Алматы 2019. <https://aknurpress.kz/reader/web/2081>
7. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С. Қыдырбаева. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
8. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
9. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбетов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
10. Құдабаев Қ.Ж. Математика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.-136 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/

QONTUSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ		SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»
Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар» Дәріс кешені «Қолданбалы математика»		№ 35-11(ҚМ)-2025 32 бетін 31 беті

11. Жұмабаев Қ.Ж. Жоғары математика (кеңістіктегі аналитикалық геометрия, анықтауыштар мен матрицалар, сызықтық тендеулер): практикум / Қ.Ж. Жұмабаев, Р. А. Жұмабаева.- Алматы, Москва: EDP Hub, Ай Пи Ар Медиа, 2024.- 169 с. //IPR SMART: <https://www.iprbookshop.ru/143330.html>
12. Тестовые вопросы по теории вероятностей: учебно-методическое пособие / В. Д. Проценко, Е. А. Лукьянова, Т. В. Ляпунова [и др.].- Москва: РУДН, 2017.- 68 с. // IPR SMART: <https://www.iprbookshop.ru/91081.html>
13. Құралова Ұ.Ә. Жоғары математика негіздері: оқу құралы / Ұ.Ә. Құралова, Г.Е. Жидекүлова.- Тараз: Таразский региональный университет имени М.Х. Дулати, 2019.- 256 с. // IPR SMART: <https://www.iprbookshop.ru/127267.html>
14. Мальцева Ж.Л. Математика для студентов-медиков. В 4 частях. Ч.1. Начала линейной алгебры: учебное пособие / Ж. Л. Мальцева, С. В. Мальцева, О. В. Рязановская.- Новосибирск: НГУ, 2023.- 112 с. //IPR SMART: <https://www.iprbookshop.ru/134642.html>
15. Алдибаева Л.Т. Тізбектің және функцияның шегі: оқу құралы.- Алматы: Нур-Принт, 2014.- 129 с. //IPR SMART: <https://www.iprbookshop.ru/67161.html>
16. Куттыгожина А.С. Жоғары математика негіздері: оқулық.- Алматы, Москва: EDP Hub, Ай Пи Ар Медиа, 2025.- 212 с. //IPR SMART: <https://www.iprbookshop.ru/149969.html>
17. Matthew A. Rewald, Bradley A. Lorang, Garrett E. Schramm. Pharmacy Calculations: An Introduction for Pharmacy Technicians: An Introduction for Pharmacy Technicians. - [Place of publication not identified] : ASHP.- 2021. // eBook Medical Collection EBSCO

QONTÜSTİK-QAZAQSTAN

**MEDISINA
AKADEMIASY**

«Qontüstik Qazaqstan medicina akademiasy» AQ



SOUTH KAZAKHSTAN

**MEDICAL
ACADEMY**

АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»

Кафедра «Медициналық биофизика және ақпараттық технологиялар»

№ 35-11(ҚМ)-2025

Дәріс кешені «Қолданбалы математика»

32 бетін 32 беті